Leçon 245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

1. Définitions de l'holomorphie, exemples. —

On regarde $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1. $\mathbb{C}$-dérivabilité, holomorphie. —

- Def : f est $\mathbb{C}$-dérivable en x ssi elle est différentiable en z et si $D_f(z)$ est une similitude directe. Equation de Cauchy-Riemann en regardant ça comme $\mathbb{R}$-ev.
- Def : f est holomorphe sur U ssi elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. On note $Hol(U)$ l'ensemble des fonctions holom sur U.
- Ré-écrire les équations de Cauchy-Riemann avec $\partial_z f$ et $\partial_{\overline{z}} f$.

2. Exemples et contre-exemples fondamentaux. —

- Ex : $f(z) = z$ et $f(z) = 1$ sont holomorphes.
- Contre-ex : $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe.
- Si f,g sont holom sur U et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors f+g, f*g, λf sont holom sur U.
- Si f est holom sur U, g holom sur V, $g(V) \subset U$, alors $f \circ g$ est holom sur V.
- Si $f : U \to V$ est holom bijective, alors f^{-1} est holom.
- Ainsi, les polynômes sont holomorphes.
- La conjugaison, le module, la partie réelle, et la partie imaginaire ne sont pas holomorphes.
- Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R > 0$. Alors sa somme est de classe C^∞ sur $B(0, R)$ et holomorphe sur $B(0, R)$ par théorème de dérivation sous le signe somme et par convergence normale de la série de fonctions.
- Ainsi, exp, sin,cos,ch,sh, sont holomorphes.
- Détermination principale du logarithme. exp est une bijection de $\{z \text{ tq } -\pi \geq Im(z) < \pi\}$ vers $\mathbb{C}^*$, holom sur $\{-\pi < Im(z) < \pi\}$. Notons log son inverse. Pour $z = |z|e^{it}, t \in [-\pi, \pi[$, on a alors $log(z) = log(|z|) + it$, la détermination principale du logarithme.
  Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}-]-]\infty, 0]$.
- Cela permet alors de définir sur pour tout $w \in \mathbb{C}$, la fonction $z^w : z \in \mathbb{C}-]-]\infty, 0] \mapsto exp(wlog(z)) \in \{-\pi < Im(z) < \pi\}$, qui est ainsi holomorphe.

2. Formule de Cauchy et conséquences. —

1. La formule de Cauchy. —

- Def : Chemin : $\gamma : [0, 1] \to U$ continu. Lacet : $\gamma(0) = \gamma(1)$.
- Intégrale curviligne : Si γ est C^1, on a alors $\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$. (marche aussi pour C^1 par morceaux en découpant sur la subdivision)
- Compact à bord régulier : Compact dont le bord est paramétrable par un lacet C^1 par morceaux, ou C^∞.
- Théorème de Cauchy sur des petits triangles dans un ouvert étoilé.
- Théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé : Soit U un ouvert étoilé, et $f \in Hol(U)$. Alors f possède une primitive dans U, et pour tout γ lacet dans U on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
- $\frac{1}{z-a}$ est holom sur $\mathbb{C} - \{a\}$
- La formule de Cauchy sur des ouverts étoilés. (on dit à l'oral qu'on peut définir l'indice et avoir un résultat plus fin, mais que c'est plus long)
- Conséquence : Une fonction holom est indéfiniment dérivable, avec : $\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw$.
- Formule de la moyenne : $f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt$ pour z, r tq $B(z, r) \subset U$.
- Cor : Une fonction qui vérifie la formule de la moyenne sur un ouvert étoilé est holomorphe.

2. Analyticité des fonctions holomorphes et applications. —

- Une fonction f est DSE en z ssi elle est la somme d'une série entière sur un voisinage de z. Elle est analytique sur U si elle est DSE en tout $z \in U$.
- Une fonction analytique sur U est de classe C^∞ sur U et est holomorphe sur U.
- Par les th précédents, une fonction holom sur U ouvert étoilé y est analytique. Donc une fonction est holom sur U ouvert étoilé ssi elle est analytique sur U.
- On a ainsi : $f(x + h) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(h)^n$ si $B(x, |h|) \in U$.
- Ainsi, toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur U est en fait de classe C^∞ et même analytique sur U.
- Sur $\mathbb{R}$, on a des fonctions seulement C^k, et la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\chi_{]0,+\infty[}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais non analytique sur $\mathbb{R}$.
- Pro : Une fonction de classe C^∞ sur $]a, b[$ est analytique ssi elle se prolonge en une fonction holom sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant $]a, b[$.
- Pro : Le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est exactement $d(a, \mathbb{C} - U)$.
- Ainsi, le DSE de exp est de rayon de convergence infini, tandis que $\frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur les $B(a, |1 - a|)$.
- Principe des zéros isolés : Si $f^{(n)}(x) = 0\ \forall n \geq 0$ en un $x \in U$, alors $f \equiv 0$ sur la composante connexe de U contenant x. Ainsi, pour U connexe et f non-nulle, l'ensemble des zéros de f est sans point d'accumulation dans U.
- Cor : Pour g,f holomorphes sur U connexe, si $f = g$ sur un ensemble ayant un point d'accumulation, alors $f \equiv g$ sur U.
- Def : Prolongement holomorphe : Pour $f \in Hol(U)$ et $g \in Hol(V)$ avec $U \subset V$, si $f \equiv g$ sur U alors g est un prolongement holomorphe de f sur V.
- Ex : $\sum_n x^n$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} - \{1\}$ par $\frac{1}{1-z}$

3. Inégalités de Cauchy et applications. —

- Inégalité de Cauchy : Pour $M(r) = sup_t(|f(z+re^{it})|)$, $\forall n \geq 0$, on a $|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.
- Théorème de Weierstrass holomorphe : Soif $(f_n)_n$ suite de fonctions holom sur U qui cv unif sur tout compact vers f. Alors f est holom sur U et $\forall k \geq 0$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$.
- Appli : Définition de ζ.

– Théorème de l'holomorphie des IàP.
– Appli : Holomorphie de Γ sur $\{Re(z) > 0\}$
– **Dev** : Espace de Bergman du disque unité (On étudie un espace de fonctions holomorphes, robuste grâce à l'holomorphie, et que l'on peut caractériser grâce à la DSE de ses éléments)

4. Principe du maximum et applications. —

– Principe du maximum : Si f atteint son maximum dans U, alors f est constante.
– Théorème de Liouville : Si f est holom sur $\mathbb{C}$ est bornée, alors f est constante. Si f est bornée par un polynôme de degré n, alors f est cosntante. (considérer $\frac{f(z)-\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}{z^n}$ qui est bornée et bien holom en 0)
– Application : Théorème de d'Alembert-Gauss
– Lemme de Schwarz : Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom avec $f(0) = 0$, alors $|f(z)| \leq |z|$, avec égalité en un $z \neq 0$ ssi f est une rotation.
– Cor : Une fonction holom $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ non-bijective ne possède qu'au plus un point fixe dans $\mathbb{D}$.
– Théorème de Koenig : Pour $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom, non bijective, ayant un point fixe α, les valeurs propres de l'opérateur $g \in Hol(\mathbb{D}) \mapsto g \circ f \in Hol(\mathbb{D})$ sont exactement les $f'(\alpha)^k$, $\forall k \geq 0$, et sons toutes de multiplicité 1. (donne déjà une notion de compacité d'opérateurs dans des espaces de fonctions holomorphes)

3. Fonctions méromorphes, exemples et applications. —

1. Singularités isolées et séries de Laurent. —

– Def : Singularité levable, pôle, singularité essentielle.
– Pro : Si f possède une singularité levable en x, alors f se prolonge holomorphiquement en x.
– Ex : $\frac{exp(z)-1}{z}$ possède une singularité levable en 0. $\frac{1}{(x-a)^k}$ possède a comme pôle d'ordre k. $exp(\frac{1}{z})$ possède une singularité essentielle en 0.
– Rem : Sur $\mathbb{R}$, $exp(\frac{1}{x})$ se prolonge de façon C^∞ en 0, pourtant.
– Def : Série de Laurent : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$. La somme est bien définie sur une couronne de rayons les rayons de CV de $\sum a_n(z-a)^n$ et $\sum_n a_{-n}(z-a)^{-n}$, et est holom sur cette couronne.
– Théorème de Casorati-Weierstrass : Si f a une singularité essentielle en a, alors pour tout $r > 0$, $f(B(a,r) - \{a\}$ est dense dans $\mathbb{C}$. (l'idée du puits aux serpents)

2. Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales. —

– Def : Une fonction méromorphe f sur un ouvert U est holom sur U sauf sur un ensemble isolé de points en lesquels f admet des pôles.
– Ex : $\Pi_i \frac{1}{(z-\lambda_i)^{k_i}}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ car admet des pôles d'ordre k_i en les λ_i.
– Théorème des résidus : Pour f méromorphe sur U et γ lacet évitant les pôles de f, alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_i \text{ pôles}} ind_\gamma(z_i).Res(f, z_i)$
– Ex : Pour f holom on retrouve 0. Pour $f(z) = \frac{1}{z}$ on trouve bien $ind_\gamma(0)$.
– Appli : Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^6} dt$ + dessin.
– Appli : $\forall 0 < \alpha < 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{sin(\pi\alpha)}$
– Appli : Formule des compléments : Pour $0 < Re(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$

4. Prolongement de fonctions holomorphes. —

1. Prolongements de séries entières, prolongements méromorphes. —

– Un point $z_0 \in \partial\Omega$ est dit régulier pour f s'il existe un ouvert V contenant $\Omega \cap \{z_0\}$ et g analytique sur V telle que $f \equiv g$ sur Ω.
Le point z_0 est dit singulier pour f sinon.
– La somme d'une série entière de rayon R possède au moins un point singulier sur $\partial B(0, R)$.
– Pour $z_1, \dots, z_n \in \partial\mathbb{D}(0,1)$, $f(z) = \Pi_{i=1}^n \frac{1}{z-z_i}$ et $a_n = f^{(n)}(0)$, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ a $z_1, \dots, z_n$ comme points singuliers.
– De même que les prolongements holomorphes, on peut définir les prolongements méromorphes.
– Prolongements méromorphes de ζ et γ.
– **Dev** : Théorème des Lacunes de Hadamard : Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.
Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
Alors, la somme de cette série entière n'a aucun point régulier sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$.
– Ex : La somme de la série $\sum_{n\geq 0} n.z^{2^n}$ est holom sur $\mathbb{D}(0,1)$, diverge en tout point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$, et n'admet aucun prolongement holom. La somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}.z^{2^n}$ est holom sur $\mathbb{D}(0,1)$, se prolonge continument sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$, mais n'admet aucun prolongement holom.
– Pour tous $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ln(x)$ se prolonge holom à $\mathbb{C} - \{z \text{ tq } z = r.e^{i\alpha},\ r > 0\}$ par $ln_\alpha(z) = ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|.e^{i\theta}$, $\theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a ainsi un α tel que $ln_\alpha(z)$ soit bien défini et que ln_α prolonge holomorphiquement ln. Cependant, aucune de ces fonctions ne peut se prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier car $\lim_{\theta\to\alpha^+}(ln_\alpha(r.e^{i\theta})) \neq \lim_{\theta\to\alpha+2\pi^-}(ln_\alpha(r.e^{i\theta}))$, $\forall r > 0$.

Références

Amar,Matheron : C-dérivabilité, exemples fondamentaux. Formule de Cauchy, analyticité, principe du maximum et applications, méromorphie, théorème des zéros isolés.
Saint Raymond : Inégalités de Cauchy, méromorphie.
Zuily, Queffélec : Lacunes de Hadamard.(Dev) Série entière qui a un rayon de CV unif strictement plus grand.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman.(Dev)
Hauchecorne : Contre-Exemple de fonctions holom ayant des problèmes.

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes